Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Лекция 6

Тлеулесова Айгерим Мекемтасовна

Цель лекции

- Сформировать у студентов понимание структуры линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, а также методов их решения (характеристическое уравнение, метод неизвестных коэффициентов, метод вариации постоянных).

Основные вопросы

- • Линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами
- • Характеристическое уравнение и его корни
- • Случаи: два, кратный и комплексные корни
- • Неоднородные уравнения и методы решения
- • Фундаментальная система решений

Определение линейного ДУ 2-го порядка

- Линейное дифференциальное уравнение второго порядка:
$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$
- При $a_1(x)$, $a_2(x)$— постоянные, получаем уравнение с постоянными коэффициентами.
$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$$
- Однородное уравнение: y'' + p y' + q y = 0.

Характеристическое уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$$

1. Ищем решение однородного уравнения в виде $y = e^{kx}$
2. Подстановка даёт: $k^2 + p\,k + q = 0$.

Это характеристическое уравнение ДУ.

Корни k_1, k_2 определяют вид общего решения.

I. Если $k_1 \neq k_2$ — действительные корни характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$, то общее решение однородного уравнения: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
II. Если $k_1 = k_2 = k$ — кратный корень характеристического уравнения, то общее решение: $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$
III. Если $k = \alpha \pm i\beta$ — комплексно-сопряжённые корни, то общее решение записывается в виде:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 e^{\alpha x} cos\beta x + C_2 sin\beta x)$$

Неоднородное уравнение

Неоднородное уравнение: $y'' + py' + qy = f(x)$.

Общее решение:

$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$,

где y_0— общее решение соответствующего однородного уравнения,

$\bar{y}$— частное решение неоднородного уравнения.

Метод неизвестных коэффициентов

Метод применяется, когда правая часть f(x):

- многочленом,
- показательной функцией,
- тригонометрической функцией или их комбинацией,
- их комбинации.

Ищем $\bar{y}$ (x) в том же виде, но с неизвестными коэффициентами,подставляем в уравнение и находим их из сравнения коэффициентов.

Пример 1. Однородное уравнение

- Решить: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

- 1) Характеристическое уравнение: $k^2 - 3k + 2 = 0$.
- 2) Корни: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.
- 3) Общее решение:
- $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$.

Пример 2. Колебательное решение

- Решить: $y'' + 4y = 0$.

- 1) Характеристическое уравнение: $k^2 + 4 = 0$.
- 2) Корни: $k = \pm 2i$.
- 3) Общее решение:
- $y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

- Это гармонические колебания с частотой 2.

Контрольные вопросы и литература

- Контрольные вопросы:
- 1. Как получается характеристическое уравнение?
- 2. Назовите три случая расположения корней и вид решений.
- 3. В чём идея метода неизвестных коэффициентов?

- Рекомендуемая литература:
- Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы.
- Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика.
- Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс).
- Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.